数理解析研究所講究録
538巻 1984年 38-46

Asymptotic theory in truncated case

和歌山大 経済　松田忠之 (Tadayuki Matsuda)

§1. 序

$x_1, \ldots, x_n$ は互いに独立に位置母数 θ を持つ同一分布 P_θ に従う確率変数とし、その密度を

$$dP_\theta/dx = p(x-\theta), \qquad -\infty < x, \theta < \infty$$

とする。ここで $p(x)$ は区間 $(-\infty, 0]$ で0、区間 $(0, \infty)$ で正の値をとる一様連続関数である。特に、原点0の近くで

$$p(x) = \alpha\beta x^{\alpha-1}(1+o(1)) \qquad \text{as} \qquad x \to +0$$

$$\text{ただし} \quad \alpha>1, \ \beta>0$$

である。このように母集団の分布がtruncateされた場合に

(I) 漸近最尤推定量(AMLE)の構成

(II) 漸近十分統計量の構成

(III) 最尤推定量(MLE)の漸近的性質

(a) Berry−Esseen 型の不等式

(b) 事後分布の漸近的性質

について調べる。

$\alpha \geqq 2$ のとき、MLEの漸近分布が正規分布になることおよびMLEが漸近有効推定量となることが知られている（竹内[6]，Weiss & Wolfowitz [7]，Woodroofe [8]）。またWoodroofe [8] は、θ が事前分布を持つ場合に事後分布が正規分布へ収束することも示した。$1<\alpha<2$ のとき、Woodroofe [9] によってMLEの漸近分布が求められた。これは正規分布でない。最近、Klaassen [1] はこの場合に有効推定量が存在しないことを示した。

§ 2. 条件と例

確率密度 $p(x)$ に関する条件をまとめておく。$f(x)=-\log p(x)$ ，$x>0$，と定義し。f の m 回微分を $f^{(m)}$ であらわす。

条件 $B_{\alpha,\beta,\gamma}$ $(\alpha>1, \beta>0, \gamma\geqq 0)$

(i) $p(x)$ は $(0,\infty)$ 上で2回連続微分可能とし、原点0の近くで

$$p(x)=\alpha\beta\, x^{\alpha-1}(1+O(x^{\gamma})),\quad f^{(1)}(x)=-(\alpha-1)\, x^{-1}(1+O(x^{\gamma})),$$

$$f^{(2)}(x)=(\alpha-1)\, x^{-2}\,(1+O(x^{\gamma})) \qquad \text{as} \quad x\to +0。$$

(ii) ($\alpha>2$ のとき) $\lim_{x\to\infty} p^{(1)}(x)=0$。

ただし $\gamma=0$ のとき $O(x^{\gamma})$ を $o(1)$ と約束する。

条件 B_{ρ} $(\rho>0)$

$^{\forall}t\geqq 0$ について $\int_0^{\infty} |f(x+t)|^{\rho}\, p(x)\, dx<\infty$。

条件 $B_\rho^{(m)}$ $(\rho>0,\ m\in N)$

p(x) を (0,∞) 上で m 回連続微分可能とし、

(i) $f^{(m)}(x)=O(x^{-m})$ as $x\to+0$、

(ii) $^\exists L>0$, $\int_L^\infty |f^{(m)}(x)|^\rho p(x)\,dx<\infty$。

条件 $\bar{B}_\rho^{(m)}$

p(x) を (0,∞) 上で m 回連続微分可能とし、

(i) $f^{(m)}(x)=O(x^{-m})$ as $x\to+0$、

(ii) $^\exists\delta>0$, $^\exists L>0$ $(\delta<L)$, $\int_L^\infty \sup_{|u|\leq\delta} |f^{(m)}(x+u)|^\rho p(x)\,dx<\infty$。

EXAMPLES (1) ($\alpha>1,\beta>0,\gamma>0$: $\gamma=1$ のとき Gamma, $\gamma=\alpha$ のとき Weibull)

$$p(x)=\alpha\beta\, x^{\alpha-1}\exp(-x^\gamma),\qquad x>0$$

とすれば条件 $B_{\alpha,\beta,\gamma}$ と任意の $\rho>0$、$m\in N$ について条件 B_ρ, $\bar{B}_\rho^{(m)}$ を満足する。

(2) (Pearson type Ⅵ: $\alpha>1,\tau>0$)

$$p(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\tau)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)}\,x^{\alpha-1}(1+x)^{-\alpha-\tau},\quad x>0$$

とすれば条件 $B_{\alpha,\beta,1}$ と任意の $\rho>0$、$m\in N$ について条件 B_ρ, $\bar{B}_\rho^{(m)}$ を満足する。

いま $M_n=\min(x_1,\dots,x_n)$ とおき、$z_n=(x_1,\dots,x_n)$ に対して

$$\begin{aligned} G_n(z_n,t)&=\sum_{j=1}^n f(x_j-t), && t<M_n\\ &=\infty, && t\geq M_n\end{aligned}$$

と定義する。関数 G_n の t による m 回微分を $G_n^{(m)}$ で表す。ただし,

$t \geqq M_n$ のときにはその値を ∞ と約束する。このとき、$G_n(z_n, t)$ を t について最小にする推定量がMLEである。f を微分可能と仮定すれば、MLE $\hat{T}_n$ は存在して

$$-\infty < \hat{T}_n < M_n, \qquad G_n^{(1)}(z_n, \hat{T}_n) = 0$$

を満足する。

よく知られているように一致性の収束の速さは α の値によって異なり、その速さ a_n は次のようになる。

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{I\,n} \quad , & \alpha > 2 \\ \sqrt{\beta n\ (\log\ n + \log\log\ n)}\ , & \alpha = 2 \\ (\beta n)^{\frac{1}{\alpha}} \quad , & 1 < \alpha < 2 \end{cases}$$

ここに I は Fisher 情報量を表す。

注意　$\alpha = 2$ のとき、$\{a_n\}$ として

$$2\beta n\, a_n^{-2} \log a_n = 1 + O((\log n)^{-1})$$

を満足する任意の数列でよい。実は上式を満足する最も簡単な形を a_n として与えた。

§ 3.　AMLEの構成

MLEは尤度方程式の根である。そこで与えられた推定量 $\{T_n\}$ から次の方法 (Newton−Raphson 法) によって新たに推定量 $\{T_n'\}$ を作る。

$$T_n' = T_n - a_n^{-2} G_n^{(1)}(z_n, T_n)$$

$\{T_n\}$ として次の性質 (translation equivariant)

$$T_n(x_1+\theta,\dots,x_n+\theta)=T_n(x_1,\dots,x_n)+\theta\ , \qquad \theta\in R$$

を持つ推定量を考えれば、$\{T_n'\}$ も同じ性質を持つ。以後、推定量と呼ぶ場合にはこの性質を持つと仮定する。勿論、MLE $\hat{T}_n$ や最小統計量 M_n がこの性質を持つことは明らかである。

θ は位置母数を表すから $\theta=0$ と仮定する。このとき P_0 を P で表し、その n 個の直積測度を P^n と書く。

<u>定義</u>（$\alpha>2$）　$\{T_n\}$ が $O(n^{-r})$ の AMLE　（r は正の実数）

$\Longleftrightarrow\ {}^{\exists}v\geqq 1,\ {}^{\exists}w>0,\ {}^{\exists}c>0$

(1)　$P^n\{\,a_n|T_n|\geqq c\,(\log n)^{\frac{v}{2}}\,\}=O(n^{-r})$

(2)　$P^n\{\,|G_n^{(1)}(z_n,T_n)|\geqq c\,n^{-r}\,(\log n)^{w}\,\}=O(n^{-r})$。

<u>定義</u>（$\alpha=2$）　$\{T_n\}$ が $O((\log n)^{-r})$ の AMLE

$\Longleftrightarrow\ {}^{\exists}v\geqq 1,\ {}^{\exists}w>0,\ {}^{\exists}c>0$

(1)　$P^n\{\,a_n|T_n|\geqq c\,(\log\log n)^{\frac{v}{2}}\,\}=O((\log n)^{-r})$

(2)　$P^n\{\,|G_n^{(1)}(z_n,T_n)|\geqq c\sqrt{n}\,(\log n)^{-r}\,(\log\log n)^{w}\,\}=O((\log n)^{-r})$。

<u>定理 1</u>（$\alpha>2$）　$p(x)$ が条件 $B_{\alpha,\beta,0}$, $B_\alpha^{(1)}$, $B_{\alpha/2}^{(2)}$ と $\bar{B}_{\alpha/3}^{(3)}$ ($\alpha<6$) または $\bar{B}_{\alpha/4}^{(3)}$ ($\alpha\geqq 6$) を満足すると仮定する。このとき定義の性質 (1) を持つ推定量から Newton−Raphson 法を反復すれば、$O(n^{-r})$ の AMLE を構成できる。ただし、これが成立する r は $2<\alpha<4$ のとき $0<r<\alpha-2$、$4\leqq\alpha<6$ のとき $(\alpha-4)/2<r<\alpha-2$、$\alpha\geqq 6$ のとき $0<r<(\alpha-4)/2$ である。

<u>定理 1′</u>（$\alpha=2$）ある $\gamma>0,\eta>0$ について条件 $B_{2,\beta,\gamma}$, $B_{2+\eta}^{(1)}$, $B_1^{(2)}$, $\bar{B}_{2/3}^{(3)}$ が

成立すると仮定する。このとき定義の性質(1)を持つ推定量からNewton−Raphson法を反復すれば、$O((\log n)^{-r}), 0<r<1$, のAMLEを構成できる。

さらに、$\{T_n\}$が定義の性質(1)を持てばNewton−Raphson法によって改良された推定量$\{T_n'\}$は一次の漸近有効推定量となることもわかる。勿論MLEはAMLEである。

§4. 漸近十分統計量の構成

推定量$\{T_n\}$から次のように統計量$\{T_{n,m}\}$を定義する。

$$T_{n,m} = \begin{cases} T_n, & m=1 \\ (T_n, G_n^{(2)}(z_n,T_n),\ldots, G_n^{(m)}(z_n,T_n)), & m \geqq 2 \end{cases}$$

<u>定義</u>　$\{T_n\}$が$\{P_\theta^n ; \theta \in R\}$に対し、$O(s_n)$の漸近十分統計量

$\Longleftrightarrow$　$^\exists \{Q_{n,\theta} ; \theta \in R\}$:確率測度の族

(1)　各T_nは$\{Q_{n,\theta} ; \theta \in R\}$に対し十分(sufficient)

(2)　$\| P_\theta^n - Q_{n,\theta} \| = O(s_n)$　(θに関して一様)。

このとき次の定理が成立する(Matsuda [4])。

<u>定理 2</u> $(\alpha>2)$　$m^* = \min(m, (\alpha-2)(m+1)/(m+\alpha+1))$とおき、$\{T_n\}$を$O(n^{-\frac{m^*}{2}})$のAMLEとする。$\alpha \leqq (m+1)(m+2)$のとき、$\{T_{n,m}\}$は$\{P_\theta^n : \theta \in R\}$に対し$O(n^{-\frac{r}{2}})$, $r< m^*$, の漸近十分統計量である。また$\alpha>(m+1)*(m+2)$のときには$O(n^{-\frac{m}{2}})$の漸近十分統計量となる。

1 :

$m=1$ として上の結果を適用すれば、$\alpha \leqq 6$ のとき AMLE (MLE を含む) は $O(n^{-r})$, $r<(\alpha-2)/(\alpha+2)$, の漸近十分統計量となり、また $\alpha>6$ のときには $O(n^{-\frac{1}{2}})$ の漸近十分統計量となることがわかる。

<u>定理 2′</u> ($\alpha=2$)　$0<r<(m+1)/(m+3)$ とする。このとき、$O((\log n)^{-r})$ の AMLE $\{T_n\}$ から構成した統計量 $\{T_{n,m}\}$ は $\{P_\theta^n : \theta \in R\}$ に対し、$O((\log n)^{-r})$ の漸近十分統計量となる。

§ 5. MLE の漸近的性質

まず、MLE $\hat{T}_n$ が標準正規分布 $\Phi(t)$ へ収束する速さを調べる。

<u>定理 3</u> (Matsuda [2] , [5])

(1)
$$\sup_{t\in R} \left| P^n\{ a_n \hat{T}_n \leqq t \} - \Phi(t) \right| = \begin{cases} O(n^{-\frac{1}{2}}), & 3<\alpha \\ O(n^{-\frac{\alpha-2}{2}} \log n), & 2<\alpha \leqq 3。\end{cases}$$

(2)　$\alpha=2$ のとき、任意の $0<s<1$ について
$$\sup_{t\in R} \left| P^n\{ a_n \hat{T}_n \leqq t \} - \Phi(t) \right| = O((\log n)^{-s})。$$

(3)　$1<\alpha<2$ のとき
$$\sup_{t\in R} \left| P^n\{ a_n \hat{T}_n \leqq t \} - H(t) \right| = \begin{cases} O(n^{-\frac{2-\alpha}{2}} (\log n)^{\frac{4-\alpha}{2\alpha}}), & \alpha+\gamma>2 \\ O(n^{-\frac{\lambda}{\alpha}}), \quad 0<\lambda<\gamma, & \alpha+\gamma \leqq 2。\end{cases}$$

($H(t)$ は正規分布でない。)

$1<\alpha<2$ のとき、定理から次の系が得られる。

系

$$P^n\{ a_n |\hat{T}_n| \geqq (\log n)^{\frac{1}{\alpha}} \} = \begin{cases} O(n^{-\frac{2-\alpha}{2}} (\log n)^{\frac{4-\alpha}{2\alpha}}), & \alpha+\gamma>2 \\ O(n^{-\frac{\lambda}{\alpha}}), \quad 0<\lambda<\gamma, & \alpha+\gamma \leqq 2。\end{cases}$$

つぎに、母数 θ の事前分布がルベーグ測度に関して絶対連続であり、正の値をとる連続な密度 $q(\theta)$ を持つ場合を考察する。さ

らに、任意のコンパクトK に対して $\delta_K>0,\ c_K>0$ が存在して $\theta\in K$, $|\sigma-\theta|<\delta_K$ のとき $|q(\sigma)-q(\theta)|\leqq c_K\, q(\theta)|\sigma-\theta|$ を仮定する。

F_{n,z_n} を事後分布とし、$Q_{n,z_n}(B)=F_{n,z_n}\{a_n(\theta-\hat{T}_n)\in B\}$ と定義する。Q_{n,z_n} が Φ へ収束する速さを調べる。

<u>定理 4</u> (Matsuda [3]) (1) 任意のコンパクトK に対して、ある正数c が存在して

(a) $6\leqq\alpha$ のとき

$$\sup_{\theta\in K} P_\theta^n\{\|Q_{n,z_n}-\Phi\|\geqq c\,n^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\log n}\}=O(n^{-r}),\qquad r<(\alpha-4)/4$$

(b) $4\leqq\alpha<6$ のとき

$$\sup_{\theta\in K} P_\theta^n\{\|Q_{n,z_n}-\Phi\|\geqq c\,n^{-\frac{\alpha-2}{\alpha+2}}\}=O(n^{-r}),\qquad r<(\alpha-2)/(\alpha+2)$$

(c) $2<\alpha<4$ のとき

$$\sup_{\theta\in K} P_\theta^n\{\|Q_{n,z_n}-\Phi\|\geqq c\,n^{-\frac{\alpha-2}{\alpha+2}}\}=O(n^{-\frac{\alpha-2}{\alpha+2}})。$$

(2) $\alpha=2$ のとき、任意の $0<s<1$ と任意のコンパクトK に対して正数c が存在して

$$\sup_{\theta\in K} P_\theta^n\{\|Q_{n,z_n}-\Phi\|\geqq c\,(\log n)^{-s}\}=O((\log n)^{s-1})。$$

REFERENCES

[1] C.A.J. Klaassen : Location estimators and spread, Ann. St. 12 (1984), 311−321.

[2] T. Matsuda : The Berry—Esseen bound for maximum likelihood estimates of translation parameter of truncated distribution, Osaka J. Math. 20 (1983), 185—195.

[3] T. Matsuda : Asymptotic properties of posterior distributions in a truncated case, Osaka J. Math. 20 (1983), 307—320.

[4] T. Matsuda : Asymptotic sufficiency II : truncated cases, Osaka J. Math. 21 (1984) 257—273.

[5] T. Matsuda : On the rate of convergence for maximum likelihood estimates in a truncated case, to appear in Osaka J. Math.

[6] 竹内 啓 : 統計的推定の漸近理論、教育出版、1974。

[7] L. Weiss and J. Wolfowitz : MLE of a translation parameter of a truncated distribution, Ann. Statist. 1 (1973), 944—947.

[8] M. Woodroofe : MLE of a translation parameter of a truncated distribution, Ann. Math. Statist. 43 (1972),113—122.

[9] M. Woodroofe : MLE of translation parameter of truncated distribution II Ann. Statist. 2 (1974), 474—488.